II CONGRESO METROPOLITANO DE FORMACIÓN DOCENTE

Título: ¿Por qué se enseña Topología a los profesores de matemática?

Autor: Gustavo Piñeiro.

Eje: La problemática de la enseñanza en la formación de docentes.

Tipo de trabajo: Relato de experiencia.

Palabras claves: Topología, Matemática, Cálculo, Aprendizaje signifcativo.

Resumen: ¿*Por qué* se enseña determinado tema? ¿*Para qué* se lo enseña? ¿Cuál es el sentido de esa enseñanza? Estas preguntas no son puramente académicas sino que, muy por el contrario, deberán guiar nuestras decisiones a la hora de organizar nuestra práctica docente. Pero estas preguntas no deben pensarse como referidas a un tema en sí mismo; no se trata de saber, por ejemplo, cuál es el sentido de enseñar Topología *per se*. La pregunta debería ser: ¿cuál es el sentido de enseñar Topología a *futuros profesores de matemática*? ¿O cuál es el sentido de enseñarla a futuros licenciados en matemática? ¿O a futuros ingenieros? ¿O psicólogos? La respuesta, como veremos, no debería ser la misma en uno u otro caso.

Ponencia:

1. Presentación: Este trabajo se basa en mi propia experiencia como docente a cargo de la materia Topología en los profesorados de matemática del Instituto de Enseñanza Superior Nº 1 “Alicia Moreau de Justo” y del Instituto de Enseñanza Superior Nº 2 “Mariano Acosta” (ambos dependientes del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires). Cabe aclarar, sin embargo, que a las reflexiones que aquí se harán se les puede atribuir un alcance más general, que excede la materia en sí o las instituciones arriba mencionadas. En efecto, por una parte los planes de estudio actualmente vigentes en muchos de los profesorados de matemática de la Provincia de Buenos Aires incluyen, después de diversas reformas introducidas en la última década, la materia Topología. De modo que estas reflexiones son también aplicables a esas instituciones.

Por otra parte, y desde un punto de vista aún más amplio, la problemática que se discutirá aquí atraviesa muchos aspectos de la formación docente, y esta discusión, por lo tanto, es aplicable a una gran diversidad de situaciones.

2. Las primeras experiencias: Comencemos diciendo que todos los libros de texto clásicos de Topología inician su exposición con la definición del concepto altamente abstracto de Espacio Topológico (o, a veces, con la noción apenas menos general de Espacio Métrico). A continuación, a partir de los axiomas de Espacio Topológico se definen, también de manera abstracta, los conceptos de conjunto abierto, cerrado, conexo y otros.

Cuando, en el año 2004, me hice cargo por primera vez de la materia, me ceñí a esta exposición clásica, axiomática, intercalando ejemplos que pudieran ser significativos para los alumnos (por ejemplo, relacionando la noción abstracta de conjunto abierto con las propiedades conocidas de los intervalos abiertos de la recta real).

La conclusión general de esta experiencia fue altamente negativa. Los alumnos sentían a la Topología como una materia ajena a su experiencia pasada o a su práctica futura como docentes, y esta situación no lograba ser revertida por los ejemplos "concretos" (hecho comprensible, ya que esos ejemplos no afectaban la esencia de la exposición, que era axiomática, abstracta y, desde el punto de vista de los alumnos, arbitraria). Los alumnos lograban un manejo más o menos mecánico de las definiciones con la habilidad necesaria para aprobar las instancias de evaluación, pero no tenían la posibilidad de apropiarse realmente de los conceptos (que carecían para ellos de un significado relevante).

3. El enfoque histórico: Durante el período intermedio entre los ciclos lectivos de los años 2004 y 2005 reflexioné extensamente acerca de la situación planteada. Ante un problema semejante (la imposibilidad de lograr un aprendizaje significativo) una de las preguntas clave que podemos hacernos es: ¿cuál es el sentido de enseñar el tema que estamos presentando? Es decir, en este caso, ¿cuál es el sentido de enseñar Topología a futuros profesores de matemática?

La respuesta tradicional a esa última pregunta es que la Topología ayuda a comprender mejor los conceptos fundamentales del Cálculo (nociones tales como continuidad, límite, etc.). Sin embargo, aunque en efecto la Topología nace del Cálculo, paradójicamente, la presentación clásica de la materia hace que los alumnos perciban esta conexión como lejana y forzada.

La verdad es que históricamente la Topología surgió de un proceso de abstracción de los conceptos del Cálculo, un largo proceso que en su momento demandó varias décadas y que culminó (no comenzó, como el enfoque clásico hace creer) con la definición de la noción de Espacio Topológico. Los libros clásicos, en realidad, presuponen que el lector ya ha pasado por este proceso de abstracción y parten de un enfoque axiomático que, en rigor, es solamente el resumen final de las conclusiones de ese proceso.

Ahora bien, por una parte, en los profesorados de matemática no existe una instancia intermedia entre el Cálculo y la Topología en la que los alumnos puedan vivenciar el proceso de abstracción antes referido (proceso que consiste en gran medida en poner al descubierto las ideas esenciales que están detrás de las definiciones y teoremas del Cálculo).

Por otra parte, y más significativamente, la conexión profunda entre el Cálculo y la Topología queda realmente revelada por el proceso de descubrimiento de esas conexiones y no por la versión depurada y abstracta de las conclusiones finales del mismo. En otras palabras: ¿qué es más significativo para los futuros docentes de matemática: aprender a manipular definiciones axiomáticas abstractas o vivenciar el proceso de descubrimiento de las propiedades fundamentales que llevaron al planteo de esos axiomas?

Por ese motivo, en el año 2005 replanteé los cursos de modo tal de orientarlos hacia el objetivo de lograr que los alumnos vivencien el proceso de abstracción que lleva del Cálculo a la Topología y vean, por ejemplo, de qué manera las nociones de conjunto conexo, conjunto compacto, punto de acumulación, y otras fluyen naturalmente del estudio del Teorema de Bolzano, de la definición de derivada y de otros conceptos clásicos del Cálculo. Este proceso, a la vez, contribuye a un recorrido helicoidal sobre estos conceptos, circunstancia que permite profundizar en ellos, recreándolos y resignifcándolos.

Asimismo, siempre con la intención de apegarse, cuando sea posible, a la génesis histórica de los conceptos, al estudiar la noción de punto de acumulación, que fue introducida por Georg Cantor hacia 1871, estudiamos cómo Cantor fue, según sus propias palabras, llevado por la lógica de sus investigaciones a la idea de conjunto transfinito. Estudiamos entonces, tal como hizo Cantor, la cardinalidad de conjuntos infinitos y su vinculación con el Problema del Continuo, es decir, con el estudio de la topología de la recta real.

Completadas aproximadamente las dos terceras partes del curso se llega como conclusión natural a la noción de Espacio Topológico. La parte final del curso desciende de la generalidad de los Espacios Topológicos al estudio de dos ejemplos fundamentales: los Espacios Métricos y los Espacios Normados. La intención general de esta segunda parte será ver, a partir de diferentes ejemplos, y siempre revisitando el Cálculo clásico, cómo los conceptos topológicos impregnan y dan sentido a muchas nociones matemáticas. Por ejemplo, vemos cómo las sucesivas aproximaciones de una función que se obtienen al calcular sus Polinomios de Taylor de orden n son, en esencia, una sucesión de polinomios que convergen a la función dada, en un proceso similar el que vemos cuando las sumas parciales de una serie numérica convergen a la suma de ésta.

El replanteo de los cursos de Topología sobre esta base fue altamente exitoso. Desde luego, hubo y hay todavía detalles para pulir o mejorar, pero el enfoque general de la materia se ha mostrado eficaz a la hora de exponer la conexión profunda entre la Topología y el Cálculo.

4. La necesidad de libros de texto específicos: Una de las debilidades del enfoque elegido para la materia Topología es el hecho de que no existe un libro de texto que se ajuste al mismo, ni siquiera levemente. Incluso un libro de título tan promisorio como (Takahashi Orosco, 1976), “Del Análisis a la Topología”, muestra en su primera parte una exposición de las nociones básicas del Cálculo y en la segunda, una exposición clásica de las nociones básicas de la Topología (que inicia con la definición usual de Espacio Topológico), pero sin mostrar conexión alguna entre ambas partes.

Por citar algunos otros ejemplos, Cotlar y Cignoli (1971), Kelley (1975) y Munkres (2002), exponen la Topología al modo clásico y abstracto. Por otra parte, Apostol (1999), Kuratowski (1995), Rudin (1980) y Sprecher (1970), desarrollan el Cálculo e introducen, en mayor o menor medida, algunas nociones topológicas, pero sin avanzar en su generalización. Barr (1989) se adentra en lo que podríamos llamar Topología Recreativa, que puede estimular la imaginación, pero no es relevante como libro de texto, dado que se limita a mostrar notas de color sin hacer una exposición sistemática de los temas.

Ahora bien, la falta de libros de texto adecuados ¿es un defecto de nuestra manera de organizar la materia o bien es una manifestación de la carencia de libros de texto específicos orientado a la formación docente? Nuestra conjetura es que la respuesta está en la segunda alternativa. Más aún, conjeturamos que esta carencia se extiende a otras ramas de la matemática y, más en general, a otras áreas del conocimiento.

La Topología no tiene el mismo significado para un futuro profesor de matemáticas que para un psicólogo o un licenciado en matemáticas. Para el psicólogo será un medio de abordar, por ejemplo, algunos de los textos de J. Lacan. Para un licenciado será un potencial tema de investigación científica. Para un profesor de matemáticas será, entre otras cosas, un medio para vivenciar el proceso de abstracción de los conceptos del cálculo. Estas diferentes formas de ver el tema, todas igualmente válidas en sus respectivos contextos, necesitan de libros de texto específicos que las reflejen, libros que, hasta donde sabemos, en su gran mayoría, aún están faltando.

Bibliografía:

APOSTOL, Tom; 1999; Calculus, (Vol I y II); Reverté, España.

BARR, Stephen; 1989: Experiments in Topology; Dover Publications Inc., EE.UU.

COTLAR, Mischa, CIGNOLI, Roberto; 1971; Nociones de Espacios Normados; Eudeba, Argentina.

KELLEY, John; 1975; Topología General; Eudeba, Argentina.

KURATOWSKI, Kazimierz; 1995; Introducción al Cálculo; Editorial Limusa, México.

MUNKRES James R.; 2002; Topología; Prentice-Hall, EE.UU:.

RUDIN, Walter; 1980, Principios de Análisis Matemático; Mc-Graw-Hill, México.

SPRECHER, David A; 1970; Elements os Real Analysis; Dover Publications, EE.UU.

TAKAHASHI OROSCO, A.; 1976; Del Análisis a la Topología; Limusa, México.