SPINOZA Y LA TEORÍA DE CONJUNTOS DE CANTOR-RUSSELL

Sánchez G., Iván.[1] */ Universidad de Buenos Aires*

Massri, César.[2] */ Universidad de Buenos Aires*

I. Introducción.

Como es sabido, tras la muerte de Baruj Spinoza sus pocas posesiones fueron vendidas, incluyendo su modesta biblioteca. De la subasta de dichos libros, es interesante notar que, de un listado de 161 volumenes, aproximadamente la cuarta parte eran obras matematicas o científicas; entre ellas, libros de álgebra, geometria y trigonometria, asi como de fisica y astronomia [4]. Esto demuestra el claro interés del autor por la ciencia de su época. Spinoza se vio fuertemente influenciado por dos científicos anteriores, Descartes y Galileo, quienes defendían una visión mecanicista de la naturaleza, que podía ser descripta en términos matemáticos.

Es posible notar el carácter prioritario que posee la matemática en su obra. Un ejemplo claro aparece en el título "*Ética, demostrada según el orden geométrico*" [1]; otro se deduce de las propias palabras del autor en el apéndice de la primera parte de la *Ética*. Allí Spinoza critica a quienes afirman que todo se debe a los designios de Dios, y sostiene que esto hubiera sido "la única causa de que la verdad permaneciese eternamente oculta para el género humano, si la matemática (...) no hubiese mostrado a los hombres otra norma de verdad" (Spinoza, 1983: 92).

Queda claro entonces, que gran parte de la obra de Spinoza ha sido influenciada por la matemática de la época. En la Ética, su sistema, su forma de explicación, su estructura mental misma, es evidentemente matemática, y en esa estructura utiliza axiomas, hipótesis deductivas de las que, obviamente, se derivan demostraciones y argumentaciones. El sistema de Spinoza es un argumento matemático, hipotético-deductivo, por lo que el contenido de su ética está ya implícito en sus primeras definiciones. En este trabajo, nos hemos centrado en un

1 isg@df.uba.ar

2 cmassri@dm.uba.ar

análisis comparativo de estas primeras definiciones con la teoría de conjuntos de Cantor y Russell.

Russell y Whitehead en "*Principia Mathematica*", afirman que una definición es una declaración de que cierto símbolo o combinación de estos, ha de significar otra combinación ya conocida [5].

Si concedemos que las palabras en Spinoza son símbolos, hemos reemplazado determinadas palabras de las definiciones del autor por símbolos de la teoría de conjuntos, logrando redefinir las primeras definiciones de Spinoza dentro de un marco matemático. Creemos que esto permitirá acercarse al autor de una manera alternativa y creativa que, tal vez, pueda explicar algunas aspectos discutidos sobre el trabajo del autor.

A continuación, abordaremos, en primer lugar, las definiciones de la parte primera de la *Ética*. Seguidamente, presentaremos una pequeña introducción a la teoría de conjuntos y finalmente, en la tercera parte describiremos el diccionario entre las definiciones del autor y la teoría de conjuntos. Para cada símbolo elegido, daremos una breve explicación de la elección. Finalmente, presentaremos algunas conclusiones y comentaremos sobre futuras líneas de desarrollo.

II. Definiciones Spinozianas.

A continuación presentamos las definiciones extraídas de la parte primera de la Ética de Spinoza:

1. Por causa de sí entiendo aquello cuya esencia implica la existencia, o, lo que es lo mismo, aquello cuya naturaleza sólo puede concebirse como existente.
2. Se llama finita en su género aquella cosa que puede ser limitada por otra de su misma naturaleza. Por ejemplo, se dice que es finito un cuerpo porque concebimos siempre otro mayor. De igual modo un pensamiento es limitado por otro pensamiento. Pero un cuerpo no es limitado por un pensamiento, ni un pensamiento por un cuerpo.
3. Por sustancia entiendo aquello que es en sí y se concibe por sí, esto es aquello cuyo concepto, para formarse, no precisa del concepto de otra cosa.
4. Por atributo entiendo aquello que el entendimiento percibe de una sustancia como constitutivo de la esencia de la misma.
5. Por modo entiendo las afecciones de una sustancia, o sea, aquello que es en otra cosa, por medio de la cual es también concebido.
6. Por Dios entiendo un ser absolutamente infinito, esto es, una sustancia que consta de infinitos atributos, cada uno de los cuales expresa su esencia eterna e infinita. *Explicación*: Digo absolutamente infinito, y no en su género; pues de aquello que es meramente infinito en su género podemos negar infinitos atributos, mientras que a la

> esencia de lo que es absolutamente infinito pertenece todo cuanto expresa su esencia, y no implica negación alguna.
>
> 7. Se llama libre a aquella cosa que existe en virtud de la sola necesidad de su naturaleza y es determinada por sí sola a obrar; y es necesaria, o mejor compelida, a la que es determinada por otra cosa a existir y operar, de cierta y determinada manera.
> 8. Por eternidad entiendo la existencia misma, en cuanto se la concibe como siguiéndose necesariamente de la sola definición de una cosa eterna. *Explicación*: En efecto, tal existencia se concibe como una verdad eterna, como si se tratase de la esencia de la cosa, y por eso no puede explicarse por la duración o el tiempo, aunque se piense la duración como careciendo de principio y fin. (Spinoza, 1983:47)

III. Rudimentos de la teoría de conjuntos.

Hagamos una breve introducción a la teoría de conjuntos. Esta teoría fue descubierta por Cantor a finales del siglo XIX y completada con los aportes de Russell quien introdujo la famosa Paradoja de Russell en el año 1901. Cantor fue el primero en descubrir la distinción entre los distintos tipos de infinitos. Por ejemplo, el infinito de los números naturales es menor al infinito de los números reales. Hoy en día, la teoría que se utiliza es la denominada Zermelo-Fraenkel-Choice. Es una teoría axiomática lo que le da su consistencia según la teoría de Gödel.

Dados objetos podemos formar un *conjunto*. Por ejemplo, podemos formar el conjunto de letras [*{a,b,c,d}*]. Los objetos que constituyen a un conjunto se los denomina *elementos*. En el ejemplo, [*a*] es un elemento del conjunto. Esto se denota

[*a in {a, b, c, d}*]

El símbolo [*in*] y [*notin*] son usados para indicar que un elemento pertenece o no a un conjunto dado. Si [*X*] es un conjunto, la sentencia [*p notin X*] significa que el objeto [*p*] no es un elemento de [*X*]. La formación de un conjunto [*X*] implica la creación de un nuevo objeto [*X*], luego ningún conjunto es elemento de sí mismo, en símbolos,

[*X notin X*].

Notar que un conjunto puede tener elementos que sean a su vez conjuntos, por ejemplo el siguiente conjunto consta de 4 elementos uno de los cuales es un conjunto,

[*{a, {b, c}, c, d}*].

Se utiliza la palabra *colección* para distinguirla de la palabra conjunto. Cuando se tiene una colección de objetos y/o conjuntos, no es claro que esta colección sea un conjunto; se debe dar una demostración. En general es algo difícil de realizar. La demostración que daremos en este párrafo fue el aporte de Russell a la teoría. Consideremos entonces la colección de todos los conjuntos, [***U***]. Demostremos que [***U***] **NO** es un conjunto. Supongamos por el absurdo que [***U***] es un conjunto, luego, como dijimos, no pertenece a sí mismo lo que da una contradicción ya que **[*U*]** contiene a todos los conjuntos (en particular a sí mismo). A la colección **[*U*]** se la denomina *Universo*. Dado que **[*U*]** no es un conjunto la noción de pertenencia no es predicable sobre él, luego **[*U*]** no tiene elementos. Es un objeto indivisible. No es un conjunto. Cabe preguntarse, ¿Por qué razón una colección no es un conjunto? La respuesta está relacionada con la infinitud de la colección (infinitud de infinitudes). Cualquier colección finita/numerable de objetos es un conjunto.

Mencionemos algunas construcciones descubiertas por el mismo Cantor, por ejemplo, la noción de subconjunto, denotada [*subset*] (significa inclusión). Diremos que [*X subset Y*] si todos los elementos de [*X*] son elementos de [*Y*]. Otra construcción muy importante es la de igualdad entre conjuntos, denotada [=]. Diremos que [*X*=*Y*] si [*X subset Y*] y [*Y subset X*]. Podemos mencionar también a la unión [*union*] entre conjuntos, a la intersección [*inters*], al producto [*prod*], a la potencia [*pot*], etc. Los conjuntos vienen naturalmente con estas operaciones llamadas *álgebra de conjuntos*.

IV. Relación entre las definiciones Spinozianas y la teoría de conjuntos

En lo siguiente propondremos una relación entre las definiciones de Spinoza, que aparecen en la Ética I, y las nociones propias de la teoría de conjuntos. Daremos un modelo matemático para la comprensión de dichas definiciones, teniendo en cuenta la obra en su totalidad. La forma de presentarlas será una a una, entre las definiciones del autor y el modelo propuesto. En lo siguiente, lo llamaremos *diccionario*.

- [=] Tomamos la "causa de sí" como la igualdad, ya que en la sustancia, la causa de sí iguala a la esencia con la existencia. Esta definición postula una identidad entre lo que es y lo que se concibe. Dos cosas son iguales si existen y si son la misma cosa. Identificamos esta definición con la igualdad "universal"; la igualdad entre objetos no concebibles dentro de otros. Notar que esta definición implica la existencia de los objetos en cuestión. Por otro lado, la existencia de un objeto no concebible dentro de otro implica la existencia de la noción de igualdad. De aquí su íntima relación con [$\boldsymbol{U}$].

- [*subset*] Un conjunto es finito en su género si es limitado (si está incluido) en otro conjunto. En otras palabras, todo conjunto [A] está limitado por otro. Basta con crear un nuevo conjunto [B] con un elemento extra, luego [A *subset* B]. Hemos decidido representar a esta definición con el símbolo de inclusión, ya que Spinoza llama finito en su género a aquella cosa que puede ser limitada por otra de su misma naturaleza, en este caso, un conjunto sólo puede ser limitado por otro que lo contenga, en caso contrario, no pueden ser comparados. Por ejemplo, el conjunto de pensamientos con el conjunto de cuerpos. En el caso del autor, un pensamiento es limitado por otro pensamiento, pero no puede ser limitado por un cuerpo y viceversa.
- [$\boldsymbol{V}$] Denotamos por [$\boldsymbol{V}$] a una colección de **todos** los conjuntos. Hemos hecho esta elección, debido a que se puede predicar de [$\boldsymbol{V}$] (la sustancia), que es en sí y se concibe por sí, aquello cuya existencia es autónoma, no necesita de ningún concepto para formarse. En este caso particular, es toda la teoría de conjuntos, cualquier conjunto es un miembro de [$\boldsymbol{V}$], la colección de todos los conjuntos. Como hemos explicado previamente, [$\boldsymbol{V}$] no es un conjunto, es un objeto. Es un átomo en la teoría de conjuntos, es indivisible. Esta es una propiedad fundamental del Universo que a la vez, es primordial en Spinoza, que se encargará de demostrarla en la proposición XII. El hecho de que se conciba por sí, nos dice que algo es una sustancia si al pensar en ello no necesitamos pensar en otra cosa. Si pensamos en [$\boldsymbol{V}$] no necesitamos pensar en otra cosa, ya que [$\boldsymbol{V}$] es la colección de todos los conjuntos, incluyendo todas las operaciones posibles que se puedan realizar sobre estos conjuntos.
- [X] Identificamos a un atributo con un conjunto infinito no contenido en ningún otro concebible. En otras palabras, si un conjunto está contenido dentro de otro concebible, entonces no es un atributo. Debe ser el *conjunto más grande concebible*. Por ejemplo, el conjunto de números naturales, si

bien es infinito, no es un atributo dado que el conjunto de números reales lo contiene. Por otro lado, el conjunto de número reales tampoco es un atributo por estar contenido dentro de un conjunto concebible más grande. Ahora bien, el conjunto de los pensamientos sí es un atributo, cualquier conjunto imaginable está dentro de él. Análogamente se puede ver que el conjunto de los cuerpos (de la extensión) también es un atributo. Denotaremos con el símbolo [X] a los conjuntos más grandes concebibles. El entendimiento percibe de [X] la infinitud, es decir, aquello que percibe de la sustancia, de [$\boldsymbol{V}$] como constitutivo de su esencia. Percibe lo que lo constituye como colección; en otras palabras, su infinitud. Resumiendo, los atributos son los conjuntos infinitos que constituyen la esencia infinita de **[$\boldsymbol{V}$].** Más adelante en la Ética, Spinoza afirma que sólo nos es posible conocer dos atributos; dos clases de conjuntos infinitos, el atributo pensamiento (números, estructuras matemáticas, etc.) y el atributo extensión (los cuerpos, las personas, etc.).

- [x] En esta definición llamamos modo al elemento, de ahí el símbolo utilizado. Los elementos son en un conjunto. Un elemento es en otra cosa (en un conjunto) por medio de la cual es concebido. Notemos que un modo puede contener elementos, contener modos dentro de sí, pero siempre, al ser elemento, es concebido dentro de un conjunto, y este conjunto es concebido por medio de un conjunto mayor, y así en orden ascendente hasta ser concebido por medio de un atributo [X] y este, por medio de la sustancia.
- [$\boldsymbol{U}$] En este caso identificamos a Dios con [$\boldsymbol{U}$]. Dado que [$\boldsymbol{U}$] no es un conjunto, la noción de pertenencia no es predicable sobre él, en otras palabras, no tiene elementos. Es indivisible, un átomo. También podríamos dudar de su existencia (no es un conjunto), pero justamente por esto, Spinoza se encarga de demostrarlo en las sucesivas proposiciones que se desprenden de las definiciones y axiomas en la Ética. Por definición, [$\boldsymbol{U}$] es una colección de todos los conjuntos, que se llama Universo. El Universo es absolutamente infinito, esto es, una sustancia [$\boldsymbol{V}$] que consta de infinitos conjuntos (de todos), de infinitos atributos, cada uno de los cuales expresa su esencia infinita (y eterna).

- [*union, inters, prod, pot*] Esta definición la hemos relacionado con el álgebra de conjuntos. Este álgebra "*es*" con el Universo. Las operaciones existen en virtud de la sola necesidad de la naturaleza del Universo. La mera existencia del Universo determina a dos conjuntos, por ejemplo, a operar por sí solos, se los puede unir, intersecar, etc. Podemos remarcar aquí, la distinción entre la libertad y la voluntad. Cuando hablamos de libertad, nos referimos a libertad de operaciones desde la óptica divina. Esta nos hace creer que se tiene la voluntad de operar entre los distintos elementos del conjunto (modos), pero en realidad, el conjunto ya esta determinado a operar por la misma naturaleza de Dios (Universo). La sustancia es libre porque todo se sigue de su esencia sin que conciba posibles ni cree contingentes.
- [*Pi*] Cualquier predicado que uno haga en [***U***] es eterno pues la matemática es atemporal. Esto explica la razón por la cual cualquier atributo revela la esencia eterna de [***U***] que hemos mencionado en el ítem 6. La existencia por sí del Universo es eterna, todo lo que se dé en él es atemporal visto desde la perspectiva del Universo. Todos los desarrollos, las operaciones que se puedan dar en el tiempo (las relaciones entre los modos), ya están dadas desde la lógica eterna. El símbolo utilizado en este caso, no tiene una razón particular.

Conclusiones

A nuestro entender este diccionario sirve para poder acercarse al Dios de Spinoza a través de la teoría de conjuntos. También suponemos que profundizando en la teoría de conjuntos se puede profundizar en el trabajo de Spinoza. Esto podría ser una futura línea de investigación. Consideramos que pedagógicamente es útil conocer la teoría de conjuntos para poder dar ejemplos que ayuden en la compresión del texto de Spinoza.

Respecto a la noción de infinito y las distinciones entre los diferentes tipos de infinitos descubiertos por Cantor, queremos remarcar que Spinoza 200 años antes ya tenía incorporado este concepto que resultó ser tan controversial en la matemática contemporánea. Podemos citar a Carta XII dirigida a Meyer donde distingue tres tipos de infinitos. El análisis de esta Carta respecto a este diccionario será un trabajo a desarrollar.

Utilizando el diccionario, es sorprendente que la demostración utilizada por Spinoza para mostrar que Dios existe y es único, se sigue de los argumentos utilizados en la teoría de conjuntos, para demostrar las propiedades del Universo, [$\boldsymbol{U}$]. Este diccionario genera otro vínculo entre la filosofía y las matemáticas. Dicho de otro modo, este diccionario, no sólo sirve para entender a Spinoza sino también para entender la teoría de conjuntos a partir de Spinoza. Esto ayudaría a la difusión del autor en ámbitos de ciencias exactas (e incluso, tal vez, en ámbitos escolares).

Si aceptamos este diccionario, a nuestro entender, podemos aceptar que Spinoza no sólo escribe su filosofía en un orden matemático, si no, que su filosofía misma (por lo menos en la *Ética I*), es matemática, es matematizable. Spinoza abre las puertas, a través de su obra, a la concepción de una matemática aún inexistente para su época, adelantándose dos siglos en la historia del pensamiento.

El presente trabajo pone a disposición algunas líneas de investigación que, creemos, merecen un desarrollo más amplio y profundo en futuras indagaciones. En este sentido, creemos que constituye una propuesta interesante para continuar avanzando en reflexiones que contribuyan a vincular nuestro ámbito de investigación con el campo filosófico.

VI. Agradecimientos.

Quisiéramos agradecer a la Profesora Diana Cohen Agrest por las sugerencias a este trabajo y su recomendación bibliográfica. También quisiéramos agradecer a Victoria Sánchez por la lectura del trabajo y sus aportes.

Bibliografía

Cantor, G. (1915). *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers*. Nueva York: Dover Publications.

Delueze, G. (2004). *Spinoza, Filosofia práctica*. Buenos Aires: Tusquets.

Parkinson, G. H. R. (1984). *Spinoza*. Valencia: Universidad de Valencia.

Russell, B., Whitehead, A. (1910). *Principia Mathematica I*. London: Cambridge University Press.

Sierpinski, W. (1965). *Cardinal and ordinal numbers*. Polonia: Polish Scientific Publishers.

Spinoza, B. (1983). *Ética demostrada según el órden geométrico*. Madrid: Orbis.